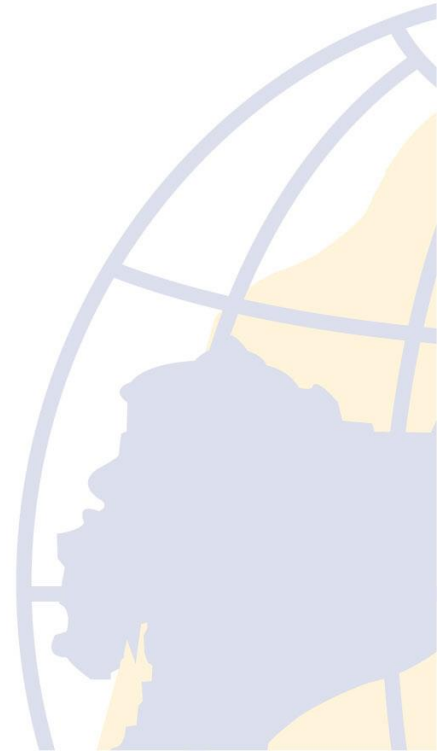


UNIDAD N.-1: Ecuaciones diferenciales de primer orden

TEMA: EDO por VARIABLES SEPARABLES

Docente: Fredy Sntaxi



OBJETIVO

Obtener la solución de EDO por VARIABLES SEPARABLES utilizando la teoría de logaritmos, exponentes, identidades trigonométricas y técnicas de integración.

VARIABLES SEPARABLES

Definición. - Se dice que una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$$

es separable o que tiene variables separables.

Por lo tanto, si dividimos la EDO para $h(y)$ quedará,

$$\frac{1}{h(y)} \frac{dy}{dx} = g(x)$$

Donde por conveniencia, hemos denotado $\frac{1}{h(y)}$ mediante $p(y)$. Es decir,

$$p(y) \frac{dy}{dx} = g(x)$$

Separamos variables y por ser una ecuación podemos escribir el símbolo de integración a los dos miembros,

$$\int p(y) dy = \int g(x) dx$$

Operamos la integración y quedará

$$P(y) = G(x) + c$$

Donde $P(y)$ y $G(x)$ son antiderivadas de $p(y) = \frac{1}{h(y)}$ y $g(x)$, respectivamente.

No hay la necesidad de usar dos constantes en la integración de la ecuación separable, porque si escribimos: $H(y) + c_1 = G(x) + c_2$, entonces la diferencia de $c_1 - c_2$ puede reemplazarse mediante una sola constante c . En muchos casos a lo largo de los capítulos de estudio renombraremos a la constante de una forma que convenga a la ED.

Ejemplo:

Resuelva las ED mediante separación de variables

✓ $(1 - x)dy + 4ydx = 0$

Separamos las variables, dejando **dy** en el lado izquierdo:

$$(1 - x)dy = -4ydx$$

Ahora lo que está multiplicando pasa a dividir:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{4}{1 - x} dx$$

Es momento de integrar:

$$\int \frac{dy}{y} = \int -\frac{4}{1 - x} dx$$

La antiderivada de cada miembro es:

$$\ln(y) = 4 \ln(1 - x) + c$$

$$\ln(y) = \ln(1 - x)^4 + c$$

Escribimos, Euler (**e**) en cada miembro quedando:

$$e^{\ln(y)} = e^{\ln(1-x)^4 + c}$$

Simplificamos y aplicamos potenciación:

$$y = (1 - x)^4 \cdot e^c$$

Finalmente tenemos:

$$y = c \cdot (1 - x)^4$$

Por sustitución:

$$1 - x = u$$

$$-dx = du$$

$$dx = -du$$

$$\int -\frac{4}{u} (-du)$$

$$\int \frac{4}{u} du = 4\ln(u)$$

Note que se cambiaron y ordenaron las variables en términos de **y** y de **x**

Para resolver las EDO mediante separación de variables u otro método, necesita recordar:

1. Teoría de logaritmos

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$p \cdot \ln(x) = \ln(x^p)$$

$$e^{\ln(y)} = y$$

2. Leyes de potenciación

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$(e^x)^p = e^{x \cdot p}$$

$$e^0 = 1$$

3. Trigonometría

$$\text{sen}(\theta) = 2xy + c$$

$$\theta = \arcsen(2xy + c)$$

O también:

$$\theta = \arctan(x + y + c)$$

$$\tan(\theta) = x + y + c$$

4. Reglas de derivación

- Fundamentales
Suma, producto, división

- Trigonométricas
Sen, cos, tan, ctg, sec, csc

5. Reglas de integración

- Fundamentales
De potencia, Euler y más

- Trigonométricas
Sen, cos, tan, ctg, sec, csc

6. Técnicas de integración

- Integración por cambio de variable y principio de sustitución
- Integración por partes
- Integración trigonométrica (identidades trigonométricas)
- Fracciones parciales
- Integración por sustitución trigonométrica (triángulos)

En caso de presentarse una integral de la forma:

$$\int \frac{x+4}{1-x} dx \longrightarrow - \int \frac{x+4}{x-1} dx$$

Primera forma es realizar una división, así:

$$\begin{array}{r|l} x+4 & x-1 \\ -x+1 & 1 \\ \hline 5 & \end{array}$$

Es equivalente a: $\frac{D(x)}{d(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{d(x)}$

$$- \int \frac{x+4}{x-1} dx = - \int \left(1 + \frac{5}{x-1} \right) dx$$

Ya puede integrar.

Segunda forma es sumar y restar **1**, así:

$$- \int \frac{x - \mathbf{1} + \mathbf{1} + 4}{x-1} dx$$

Agrupamos y hacemos linealidad:

$$- \int \frac{(x - \mathbf{1}) + 5}{x-1} dx = - \int \frac{(x - \mathbf{1})}{x-1} dx - \int \frac{5}{x-1} dx$$

Simplificamos:

$$- \int dx - \int \frac{5}{x-1} dx$$

Ya puede integrar.

Ejercicios:

Resuelva las ED mediante separación de variables.

1) $(1 + x)dy - ydx = 0$ con el valor inicial $y(2) = 3$

2) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ con el valor inicial $y(-3) = -2$

3) $x^2y' = y - xy$ con el valor inicial $y(-1) = -1$

4) $\frac{dy}{dx} = y^2 - 9$

5) $(e^{2y} - y)\cos x \frac{dy}{dx} = e^y \sen 2x$

6) $x^3dx - \sqrt{x^2 + 4}dy = 0$

Ejercicio tipo:

Resuelva las EDO mediante sustitución y separación de variables

$$yy' + x = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 + y^2}{x} \right)^2$$

Aplicando potenciación al segundo miembro, queda:

$$yy' + x = \frac{1}{2x^2} (x^2 + y^2)^2$$

Por sustitución hacemos que: $t = x^2 + y^2$

Derivamos con respecto a x , así: $t' = 2x + 2y y'$

$$\text{Despejamos a } y', \text{ así: } y' = \frac{t' - 2x}{2y}$$

Reemplazamos en la EDO y queda:

$$y \left(\frac{t' - 2x}{2y} \right) + x = \frac{1}{2x^2} t^2$$

Simplificamos y , así como multiplicamos por 2:

$$t' - 2x + 2x = \frac{1}{x^2} t^2$$

Cancelamos términos semejantes y queda:

$$t' = \frac{1}{x^2} t^2$$

Es equivalente a:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{t^2}{x^2}$$

Por variables separables, escribimos:

$$\frac{dt}{t^2} = \frac{dx}{x^2}$$

Procedemos a integrar, así:

$$\int t^{-2} dt = \int x^{-2} dx$$

La antiderivada es:

$$-t^{-1} = -x^{-1} + C$$

Es equivalente a:

$$-\frac{1}{t} = -\frac{1}{x} + C = \frac{-1 + Cx}{x}$$

Podemos invertir y reemplazar $t = x^2 + y^2$:

$$-(x^2 + y^2) = \frac{x}{-1 + Cx} \text{ es lo mismo } x^2 + y^2 = \frac{x}{1 - Cx}$$

Referencias:

D. Zill, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Editorial Mcgraw-Hill, México, Octava Edición, 2012.

E. Kreyszig, Matemáticas Avanzadas Para Ingeniería, Vol. I, Editorial Limusa Wiley, México, Cuarta Edición, 2013.

TEXTO VIRTUAL

<https://bibliotecas.ups.edu.ec:3488/es/ereader/bibliotecaups/39438>

TEXTO VIRTUAL

<https://bibliotecas.ups.edu.ec:3488/es/ereader/bibliotecaups/174406>

TEXTO VIRTUAL

<https://bibliotecas.ups.edu.ec:3488/es/ereader/bibliotecaups/40023>

